

Известия вузов. Математика
2018, № 5, с. 13–19

<http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/>
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.М. БИКЧЕНТАЕВ, С.А. АБЕД

ПАРАНОРМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В НОРМИРОВАННОЙ АЛГЕБРЕ

Аннотация. Для нормированной алгебры \mathcal{A} и натурального числа k введены и исследованы $\|\cdot\|$ -замкнутые классы $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$. Показано, что $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ содержится в $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех k и замкнут относительно возведения своих элементов в любую натуральную степень. Если \mathcal{A} унитарна, U, V из \mathcal{A} такие, что $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то UTV лежит в $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех k . Пусть \mathcal{A} унитарна, тогда 1) если элемент T из $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент T^{-1} лежит в $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$; 2) при $\|I\| = 1$ класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ состоит из нормалоидных элементов; 3) если спектр элемента T из $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ лежит на единичной окружности, то $\|TX\| = \|X\|$ для всех X из \mathcal{A} . Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

Ключевые слова: гильбертово пространство, C^* -алгебра, паранормальный оператор, квазинильпотентный оператор, изометрия, гипонормальный оператор, нормалоидный оператор, нормированная алгебра, унитарная алгебра.

УДК: 517.98

Введение. Исследование различных подмножеств в нормированных алгебрах и в $*$ -алгебрах операторов является актуальной задачей функционального анализа (см., например, [1]–[5] для классов гипонормальных, нормальных, идемпотентных, унитарных операторов, и разностей идемпотентов соответственно). В этой работе для нормированной алгебры \mathcal{A} и $k \in \mathbb{N}$ введены и исследованы $\|\cdot\|$ -замкнутые классы

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathcal{A} \text{ с } \|A\| = 1\}.$$

Показано, что $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (теорема 2). Если \mathcal{A} — подалгебра нормированной алгебры \mathcal{B} , то $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{B})$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (предложение 1). Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (теорема 5). Если \mathcal{A} унитарна, $U, V \in \mathcal{A}$ такие, что $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (теорема 3). В частности, если \mathcal{A} — унитарная C^* -алгебра и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех изометрий $U \in \mathcal{A}$ и $k \in \mathbb{N}$ (следствие 3). Если \mathcal{A} коммутативна и $\|T^2\| = \|T\|^2$ для всех $T \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ (предложение 6).

Пусть \mathcal{A} унитарна, тогда 1) если элемент $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ (теорема 4); 2) при $\|I\| = 1$ класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ состоит из нормалоидных элементов (следствие 1); 3) если спектр элемента $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ лежит на единичной окружности, то $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$ (следствие 4). Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} (следствие 6).

Поступила 29.03.2017

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидий, выделенных Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9 и 1.1515.2017/4.6).

1. Обозначения и определения. Алгеброй называется векторное пространство \mathcal{A} над полем Λ ($= \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), в котором определено умножение элементов, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} X(YZ) &= (XY)Z, & (Y+Z)X &= YX + ZX, \\ X(Y+Z) &= XY + XZ, & \lambda(XY) &= (\lambda X)Y = X(\lambda Y) \end{aligned}$$

для всех $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ и $\lambda \in \Lambda$. Алгебра \mathcal{A} унитарна (т.е. обладает единицей), если существует элемент $(0 \neq)I \in \mathcal{A}$ такой, что $IX = XI = X$ ($X \in \mathcal{A}$). Элемент X алгебры \mathcal{A} с I называется обратимым справа, если существует элемент $X^{-1} \in \mathcal{A}$ такой, что $XX^{-1} = I$. Алгебра \mathcal{A} называется нормированной, если в \mathcal{A} определена такая норма $\|\cdot\|$, что $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}$. Каждая подалгебра в \mathcal{A} , снабженная индуцированной нормой, является нормированной алгеброй. Напомним, что $T \in \mathcal{A}$ квазинильпотент, если $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; нормалоидный, если $\|T^n\| = \|T\|^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть \mathcal{A} — нормированная унитарная алгебра. Тогда в \mathcal{A} существует (эквивалентная исходной норме) норма $\|\cdot\|_1$ такая, что $\|I\|_1 = 1$ (для каждого $X \in \mathcal{A}$ рассмотрим оператор $\pi(X)(Y) = XY$ ($Y \in \mathcal{A}$) и положим $\|X\|_1 = \|\pi(X)\|$). Если $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ — нормированные алгебры, то алгебра $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$, снабженная нормой

$$\|(X_i)_{i=1}^n\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|,$$

является нормированной алгеброй ([6], гл. I, § 2).

Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — *-алгебра всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется паранормальным, если $\|T^2x\|_{\mathcal{H}} \geq \|Tx\|_{\mathcal{H}}^2$ для всех $x \in \mathcal{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{H}} = 1$ ([7]–[9]); изометрией, если $T^*T = I$; гипонормальным, если $T^*T \geq TT^*$. C^* -алгеброй называется комплексная банахова *-алгебра такая, что $\|X^*X\| = \|X\|^2$ для всех $X \in \mathcal{A}$. По теореме Гельфанда–Наймака любую C^* -алгебру можно реализовать как C^* -подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства \mathcal{H} .

2. Основные результаты. Пусть \mathcal{A} — нормированная алгебра над полем Λ , $\mathcal{A}_1 = \{X \in \mathcal{A} : \|X\| = 1\}$ и $k \in \mathbb{N}$. Введем класс

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathcal{A}_1\}.$$

Очевидно, $0 \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \lambda T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Класс $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ $\|\cdot\|$ -замкнут в \mathcal{A} .

Доказательство. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ и $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \in \mathcal{A}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда в силу $\|\cdot\|$ -непрерывности операции произведения в $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ получаем $T_n^{k+1} \xrightarrow{\|\cdot\|} T^{k+1}$ и для каждого $A \in \mathcal{A}_1$ имеем $T_n A \xrightarrow{\|\cdot\|} TA$, $T_n^{k+1} A \xrightarrow{\|\cdot\|} T^{k+1} A$ при $n \rightarrow \infty$. В силу непрерывности функционала $\|\cdot\|$ получаем

$$\|T_n A\| \rightarrow \|TA\|, \quad \|T_n^{k+1} A\| \rightarrow \|T^{k+1} A\| \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для каждого $A \in \mathcal{A}_1$. □

Предложение 1. Пусть \mathcal{A} — плотная подалгебра нормированной алгебры \mathcal{B} . Тогда $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{B})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ и $A \in \mathcal{B}_1$. Существует последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A} \setminus \{0\}$ такая, что $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $a_n = \|A_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому в силу неравенства треугольника имеем

$$\|a_n^{-1}A_n - A\| \leq \|a_n^{-1}A_n - A_n\| + \|A_n - A\| = (a_n^{-1} - 1)a_n + \|A_n - A\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что $a_n^{-1}A_n \in \mathcal{A}_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь неравенство $\|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1}$ следует из $\|\cdot\|$ -непрерывности операции произведения в $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ и непрерывности функционала $\|\cdot\|$ на \mathcal{B} . \square

Предложение 2. Пусть $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}_n$ — нормированные алгебры. Тогда $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1) \times \dots \times \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $T_i \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_i)$ и $(0 \neq) A_i \in \mathcal{A}_i$ для всех $1 \leq i \leq n$, $\max_{1 \leq i \leq n} \|A_i\| = 1$.

Для всех $1 \leq i \leq n$ имеем

$$\left\| T_i^{k+1} \frac{A_i}{\|A_i\|} \right\| \geq \left\| T_i \frac{A_i}{\|A_i\|} \right\|^{k+1},$$

поэтому $\|T_i^{k+1}A_i\| \geq \|T_iA_i\|^{k+1}\|A_i\|^{-k} \geq \|T_iA_i\|^{k+1}$. Таким образом,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|T_i^{k+1}A_i\| \geq \max_{1 \leq i \leq n} \|T_iA_i\|^{k+1} = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|T_iA_i\| \right)^{k+1}$$

и предложение доказано. \square

Теорема 2. Имеем $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно выполнено для $k - 1$, тогда для каждого $A \in \mathcal{A}_1$ имеем

$$\begin{aligned} \|T^{k+1}A\| &= \|TA\| \cdot \left\| T^k \frac{TA}{\|TA\|} \right\| \geq \|TA\| \cdot \left\| T \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^k = \\ &= \frac{\|T^2A\|^k}{\|TA\|^{k-1}} \geq \frac{\|TA\|^{2k}}{\|TA\|^{k-1}} = \|TA\|^{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 1. Пусть \mathcal{A} — нормированная унитарная алгебра и $\|I\| = 1$. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то T нормалоидный.

Доказательство. Имеем $\|T^n\| = \|T^n I\| \geq \|TI\|^n = \|T\|^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. \square

Отсюда получаем

Следствие 2. Пусть \mathcal{A} — нормированная унитарная алгебра и $\|I\| = 1$. Если $(0 \neq) T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то T не может быть квазинильпотентом.

Предложение 3. Пусть \mathcal{A} — нормированная алгебра.

- (i) Если $T \in \mathcal{A}$ с $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$, то $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$.
- (ii) Если $T \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{A})$ и $T^k \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{A})$, то $T \in \mathcal{P}_{kn-1}(\mathcal{A})$ для всех $k, n \geq 2$.

Доказательство. (i) Для каждого $A \in \mathcal{A}_1$ имеем $1 = \|A\| = \|A\|^2$, поэтому $1 = \|TA\| = \|T(TA)\| = \|TA\|^2$.

(ii) Для каждого $A \in \mathcal{A}_1$ имеем $\|T^{kn}A\| = \|(T^k)^n A\| \geq \|T^k A\|^n \geq \|TA\|^{kn}$. \square

Предложение 4. Пусть \mathcal{A} — нормированная алгебра, $X \in \mathcal{A}_1$ и $T \in \mathcal{A}$ такие, что $XTX = T$. Если $k \in \mathbb{N}$ нечетно и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $XT \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$.

Доказательство. Очевидно, $(XT)^{k+1} = (XTX \cdot T)^{\frac{k+1}{2}} = T^{k+1}$ и

$$\|(XT)^{k+1}A\| = \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \geq \|XTA\|^{k+1}$$

для всех $A \in \mathcal{A}_1$. \square

Предложение 5. Пусть нормированная алгебра \mathcal{A} унитарна. Тогда $\lambda I \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и справедливы утверждения

- (i) если $T \in \mathcal{A}_1$ с $T^{k+1} = I$, то $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$,
- (ii) если $T = T^{k+1} \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ и $\|I\| = 1$, то $\|T\| \in \{0, 1\}$.

Доказательство. (i) Имеем $1 = \|T^{k+1}A\| = \|A\| \geq \|TA\| \geq \|TA\|^{k+1}$ для всех $A \in \mathcal{A}_1$ и $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Для всех $T = T^{k+1} \in \mathcal{A}$ имеем $\|T\| = \|T^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1}$, значит, $\|T\| \in \{0\} \cup [1, \infty)$. Если $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $\|TA\| = \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1}$, поэтому $\|TA\| \in [0, 1]$ для всех $A \in \mathcal{A}_1$. В частности, при $A = I$ получаем $\|T\| \leq 1$. Следовательно, $\|T\| \in \{0, 1\}$. \square

Предложение 6. Если \mathcal{A} — коммутативная (т. е. $XY = YX$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}$) нормированная алгебра и $\|T^2\| = \|T\|^2$ для всех $T \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно проверить утверждение для $k = 1$. Для всех $T \in \mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{A}_1$ имеем $T^2A = TAT$ и $\|T^2A\| = \|TAT\| \geq \|TATA\| = \|TA\|^2$. \square

Теорема 3. Пусть \mathcal{A} — нормированная унитарная алгебра и $U, V \in \mathcal{A}_1$ такие, что $VU = I$. Если $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Имеем $(UTV)^{k+1} = UT^{k+1}V$ и нужно показать, что

$$\|(UTV)^{k+1}A\| = \|UT^{k+1}VA\| \geq \|UTVA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathcal{A}_1.$$

Если $VA = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $VA \neq 0$, тогда $0 < \|VA\| \leq 1$ и

$$\begin{aligned} \|UT^{k+1}VA\| &\geq \|VUT^{k+1}VA\| = \|T^{k+1}VA\| = \left\| T^{k+1} \frac{VA}{\|VA\|} \right\| \|VA\| \geq \\ &\geq \left\| T \frac{VA}{\|VA\|} \right\|^{k+1} \|VA\| = \frac{\|TV A\|^{k+1}}{\|VA\|^k} \geq \|TV A\|^{k+1} \geq \|UTVA\|^{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 3. Пусть \mathcal{A} — унитарная C^* -алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех изометрий $U \in \mathcal{A}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Следствие 3 при $k = 1$ обобщает утверждение (ii) теоремы 2 ([10]).

Теорема 4. Пусть \mathcal{A} — нормированная унитарная алгебра. Если элемент $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}_1$, $T^{-2} = (T^{-1})^2$. Нужно показать, что $\|T^{-2}A\| \geq \|T^{-1}A\|^2$. Если $T^{-2}A = 0$, то $T^{-1}A = T \cdot T^{-2}A = 0$, и утверждение выполнено. Если $T^{-2}A \neq 0$, то

$$\left\| T^2 \frac{T^{-2}A}{\|T^{-2}A\|} \right\| \geq \left\| T \frac{T^{-2}A}{\|T^{-2}A\|} \right\|^2,$$

$$\text{т. е. } \frac{\|A\|}{\|T^{-2}A\|} = \frac{1}{\|T^{-2}A\|} \geq \frac{\|T^{-1}A\|^2}{\|T^{-2}A\|^2}.$$

\square

Следствие 4. Пусть \mathcal{A} — нормированная унитарная алгебра над полем \mathbb{C} и $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ такой, что спектр $\sigma(T)$ лежит на единичной окружности. Тогда $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Так как $\sigma(T)$ лежит на единичной окружности, имеем $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ в силу следствия 1 и теоремы 4. Для всех $(0 \neq)X \in \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned} \|X\| \geq \|TX\| &= \|T^{-1}X\| \left\| T^2 \frac{T^{-1}X}{\|T^{-1}X\|} \right\| \geq \|T^{-1}X\| \left\| T \frac{T^{-1}X}{\|T^{-1}X\|} \right\|^2 = \\ &= \frac{\|X\|^2}{\|T^{-1}X\|} \geq \|X\|. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть \mathcal{A} — нормированная алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то

$$\|T^3 A\| \geq \|T^2 A\| \cdot \|TA\| \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A}_1. \quad (1)$$

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $TA \neq 0$. Тогда

$$\|T^3 A\| = \|TA\| \cdot \left\| T^2 \frac{TA}{\|TA\|} \right\| \geq \|TA\| \cdot \left\| T \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^2 = \frac{\|T^2 A\|^2}{\|TA\|} \geq \frac{\|T^2 A\| \cdot \|TA\|^2}{\|TA\|} = \|T^2 A\| \cdot \|TA\|. \quad \square$$

Лемма 2. Пусть \mathcal{A} — нормированная алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то

$$\|T^{k+1} A\|^2 \geq \|T^k A\|^2 \cdot \|T^2 A\| \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A}_1 \text{ и } k \in \mathbb{N}. \quad (2_k)$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Для $k = 1$ имеем

$$\|T^2 A\|^2 = \|T^2 A\| \cdot \|T^2 A\| \geq \|TA\|^2 \cdot \|T^2 A\|$$

и (2_1) выполнено. Пусть (2_k) выполнено для k и $TA \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} \|T^{k+2} A\|^2 &= \|TA\|^2 \cdot \left\| T^{k+1} \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^2 \geq \|TA\|^2 \cdot \left\| T^k \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^2 \cdot \left\| T^2 \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^2 = \\ &= \|T^{k+1} A\|^2 \frac{\|T^3 A\|}{\|TA\|} \geq \|T^{k+1} A\|^2 \cdot \|T^2 A\| \end{aligned}$$

в силу (1) и (2_k) . Поэтому (2_{k+1}) выполнено. \square

Теорема 5. Пусть \mathcal{A} — нормированная алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Достаточно показать, что если $T, T^k \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то $T^{k+1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$. Пусть $A \in \mathcal{A}_1$ и $T^2 A \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} \|T^{2(k+1)} A\| &= \left\| T^{2k} \frac{T^2 A}{\|T^2 A\|} \right\| \cdot \|T^2 A\| \geq \left\| T^k \frac{T^2 A}{\|T^2 A\|} \right\|^2 \cdot \|T^2 A\| = \\ &= \frac{\|T^{k+2} A\|^2}{\|T^2 A\|} \geq \frac{\|T^{k+1} A\|^2 \cdot \|T^2 A\|}{\|T^2 A\|} = \|T^{k+1} A\|^2 \end{aligned}$$

в силу (2_{k+1}) леммы 2. \square

Замечание 1. Из теоремы 5 можно получить второе доказательство следствия 1. Для элементов $A = I$, $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \|T^{2^n}\| &= \|T^{2^n} A\| \geq \|T^{2^{n-1}} A\|^2 = \|T^{2^{n-1}}\|^2 \geq \|T^{2^{n-2}} A\|^{2^2} = \|T^{2^{n-2}}\|^{2^2} \geq \dots \geq \\ &\geq \|TA\|^{2^n} = \|T\|^{2^n}. \end{aligned}$$

Последовательность $\{\|X^n\|^{1/n}\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ для каждого $X \in \mathcal{A}$, и ее предел равен $\inf_n \|X^n\|^{1/n}$ ([6], гл. I, § 2, предложение 1). Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2n}\|^{1/2^n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n} \geq \|T\|$ и $\|T^n\|^{1/n} \geq \|T\|$, т. е. $\|T^n\| \geq \|T\|^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и T является нормаллоидным.

Из теоремы 1 [10] имеем

Следствие 5. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в \mathcal{H} .

Поскольку операция произведения секвенциально совместно непрерывна в сильной операторной топологии в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ([11], задача 93), из следствия 5 имеем

Следствие 6. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ секвенциально замкнут в сильной операторной топологии.

Следствие 7. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то в $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ существует не гипонормальный оператор.

Доказательство. В ([11], задача 164) П. Халмош привел пример гипонормального оператора $T \in \mathcal{A}$, для которого T^2 не является гипонормальным. Имеем $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ в силу п. (i) теоремы 2 [10], поэтому $T^2 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ в силу теоремы 5. \square

Замечание 2. Если $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ есть множество всех нормальных матриц из \mathcal{A} . Для $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ теорема 2 установлена в [12] и [13], теорема 4 (для обратимого T) и следствие 4 доказаны в [12], а леммы 1, 2 и теорема 5 — в [8]. Мы модифицировали соответствующие доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бикчентаев А.М. О нормальных τ -измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана, Матем. заметки **96** (3), 350–360 (2014).
- [2] Ахрамович М.В., Муратов М.А., Шульман В.С. Теорема Фуглида–Патнэма в алгебрах с инволюциями, Матем. заметки **98** (4), 483–497 (2015).
- [3] Бикчентаев А.М. Об идемпотентных τ -измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана, Матем. заметки **100** (4), 492–503 (2016).
- [4] Александров А.Б., Пеллер В.В. Формула следов Крейна для унитарных операторов и операторно липшицевы функции, Функци. анализ и его прилож. **50** (3), 1–11 (2016).
- [5] Бикчентаев А.М. Разности идемпотентов в C^* -алгебрах, Сиб. матем. журн. **58** (2), 183–189 (2017).
- [6] Бурбаки Н. Спектральная теория (Мир, М., 1972).
- [7] Istrăţescu V. On some hyponormal operators, Pacific J. Math. **22** (3), 413–417 (1967).
- [8] Furuta T. On the class of paranormal operators, Proc. Japan Acad. **43** (7), 594–598 (1967).
- [9] Kubrusly C.S. Hilbert space operators. A problem solving approach (Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003).
- [10] Бикчентаев А.М. Два класса τ -измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, Изв. вузов. Матем., № 1, 86–91 (2017).
- [11] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах (Мир, М., 1970).
- [12] Istrăţescu V., Saito T., Yoshino T. On a class of operators, Tôhoku Math. J. **18** (4), 410–413 (1966).
- [13] Furuta T., Horie M., Nakamoto R. A remark on a class of operators, Proc. Japan Acad. **43** (7), 607–609 (1967).

Айрат Мидхатович Бикчентаев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Сами Абдулла Абед

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: samialbarkish@gmail.com

A.M. Bikchentaev and S.A. Abed

Paranormal elements in normed algebra

Abstract. For a normed algebra \mathcal{A} and natural numbers k we introduce and investigate the $\|\cdot\|$ -closed classes $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$. We show that $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ is a subset of $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ for all k . If T in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, then T^n lies in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ for all natural n . If \mathcal{A} is unital, $U, V \in \mathcal{A}$ are such that $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ and T lies in $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, then UTV lies in $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ for all natural k . Let \mathcal{A} be unital, then 1) if an element T in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ is right invertible, then the right inverse element T^{-1} lies in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$; 2) for $\|I\| = 1$ the class $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ consists of normaloid elements; 3) if the spectrum of an element T in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ lies on the unit circle, then $\|TX\| = \|X\|$ for all $X \in \mathcal{A}$. If $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, then the class $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ coincides with the set of all paranormal operators on a Hilbert space \mathcal{H} .

Keywords: Hilbert space, C^* -algebra, paranormal operator, quasinilpotent operator, isometry, hyponormal operator, normaloid operator, normed algebra, unital algebra.

Airat Midkhatovich Bikchentaev

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Sami Abdulla Abed

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: samialbarkish@gmail.com